Quantelung der Zeit und Quantenmechanik

M. Börner

Lehrstuhl für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München

Z. Naturforsch. **40 a,** 456 – 461 (1985); eingegangen am 19. Februar 1985 *

Time Quantization and Quantum Mechanics

If the universe as a whole can be described as an ordered succession of discrete (Eigen-)states, the parameter of this order, a number t ($t \in \mathbb{Z}$) plays the role of a quantizised time. Then a particle (with mass m) as a substructure of the universe no longer follows a classical equation of motion with the moment p and the position x. The functional connection between these two quantities is rather a distribution. Especially there no longer exists the classical union of differential equation-initial conditions-path. The path is now only understandable as average, introducing a continuously running time. A central part for finding $\bar{p}$ and $\bar{x}$ as such averages, is played by the expectation values of these new quantities. Since the expectation values depend on all discrete points $x(t)$ $(-\infty \leqq t \leqq +\infty)$, we find sumrelations, which we can approximate by integrals. The integration extends over all dx resp. dp-elements, which are loaded with the probability of their appearance. Following this procedure p and x become operators. If we postulate $\bar{p}$ and $\bar{x}$ to fulfil Newtons law, we find the ψ_x and ψ_p functions, constituting the resp. probability densities, to be governed by Shroedingers equation. The necessary existence of a quantum mechanics can thus be a reference to the existence of a noncontinuous time.

1. Einleitung

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die quantenmechanische Bewegung eines Teilchens im Hilbert-Raum verknüpft werden kann mit einer Teilchenstruktur in einem 3-dimensionalen Raum und einem diskontinuierlichen Zeitparameter.

Bei der Einführung einer diskontinuierlichen Zeit muß man die klassischen Bewegungsgleichungen aufgeben und statt dieser die Zuordnung von Zeit und Ort über eine bloße Tabellierung einführen.

Der Zeitparameter t tabelliert Zustände, die den Kosmos als ganzes betreffen und über deren Natur hier keine speziellen Annahmen gemacht werden müssen. (Vgl. aber [1 – 3].)

2. Erste Konsequenzen aus einer diskontinuierlichen Zeitfolge. – Das Phasenintegral

Die Zustände sollen aus einer tieferen Theorie folgen, deren Einzelheiten wird nicht zu kennen brauchen. Insoweit zu diesen Strukturen „Uhren" (Merkmale) gehören ist ihre „zeitliche" Nachbarschaft leicht bestimmbar. Da bei der Darstellung des Kosmos als eine Folge von Zuständen sehr komplexe Strukturen dargestellt werden müssen, können wir davon ausgehen, daß der Ordnungsparameter der die heutige Welt repräsentierenden Zustände sehr groß sein muß. Wir fragen hier nicht nach der Ursache einer Bewegung, insbesondere nicht nach einer „Bewegungs"-Gleichung (vgl. 3. und 4.). Abbildung 1 veranschaulicht die Tabellierung eines Teilchenschwerpunktes: Der Teilchen-„Ort" x liegt jeweils in einem anderen dreidimensionalen Raum.

Die Punkte in der Darstellung Abb. 1 ergeben die tabellarische Zuordnung des Parameters $t \in \mathbb{R}$ zum Ort x des Teilchens, und fundamental soll nur diese tabellarische Zuordnung sein. Erst die durchgezogene Treppenkurve ist die Kurve des Teilchen-

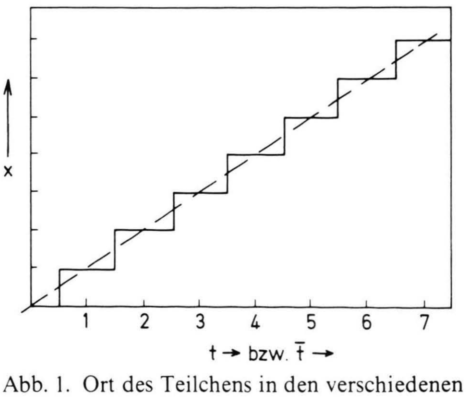

Abb. 1. Ort des Teilchens in den verschiedenen Zuständen.

* Eingang der ersten Fassung 28. 12. 1981.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. rer. nat. Manfred Börner, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München, Arcisstr. 21, 8000 München 2.

0340-4811 / 85 / 0500-0456 $ 01.30/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.

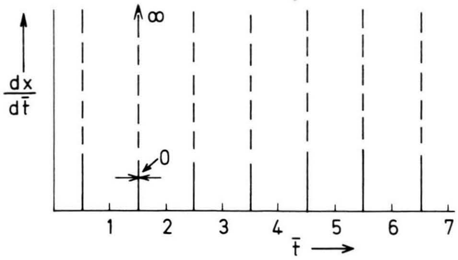

Abb. 2. Die Distribution $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t}$ als Folge von Diracschen Funktionen $\bar{v}\,\delta(\bar{t}-t+\frac{1}{2})$.

ortes, wenn man mit Hilfe einer makroskopischen „Zeit"-Meßapparatur die Zeit kontinuisiert:

$$t \to \bar{t}. \tag{1}$$

Im weiteren ist hier die Zeit dimensionslos. Aus Abb. 1 leitete man unmittelbar Abb. 2 ab, in der der „Differentialquotient" $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t}$ aufgezeichnet ist, eine uneigentliche Funktion, die man erhält, wenn man die Zeitzählung t nach (1) kontinuisiert.

Es wird

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}} = \bar{v} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{t}-t+\tfrac{1}{2}), \tag{2}$$

und $\bar{v}$ ist die „mittlere Geschwindigkeit" der „Bewegung" des Teilchens (entlang der gestrichelten Linie in Abbildung 1). Wir bilden an dieser Stelle die diskontinuierliche Tabelle auf eine geläufige Zeitvorstellung ab. Schreiben wir (im Sinne von Abb. 1)

$$\mathrm{d}\bar{x} = \bar{v}\,\mathrm{d}\bar{t}, \tag{3}$$

so gewinnen wir eine mittlere Lagekoordinate $\bar{x}$ des bewegten Teilchens. Wegen

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+t} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{t}-t+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}\bar{t} = t \tag{4}$$

wird das Integral im Phasenraum der Größe p über die Lagekoordinate $\bar{x}$ mit

$$p = m\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}} = m\,\bar{v} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{t}-t+\tfrac{1}{2}) \tag{5}$$

(m = Teilchenmasse)

zu einer mit $t \in \mathbb{Z}$ diskontinuierlichen Größe.

3. „Bewegungs"-Gleichungen

Ehe wir auf einen Zusammenhang der diskontinuierlichen „Bewegung" nach einer Tabelle und der Schrödinger-Gleichung kommen, wollen wir uns kurz mit der klassischen Bewegungsgleichung für den Teilchenort eines Teilchens beschäftigen.

Der kontinuierlichen Bewegung in der Zeit ist eine Geschwindigkeit zuordenbar:

$$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Hinzu kommt als Bewegungsgleichung in der Newtonschen Mechanik für die äußere Kraft F die Beziehung

$$F(x,t) = m\,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2. \tag{7}$$

Gibt man zur Zeit $t=t_0$ den Ort $x=x_0$ und die Geschwindigkeit $v=v_0$ vor, so ist der Bewegungsablauf für

$$-\infty \leqq t \leqq +\infty$$

eindeutig bestimmt. Die Gesetze sind kausal. Aus t_0, x_0, v_0 folgt mit $t_0+\mathrm{d}t$, $x_0+\mathrm{d}x$ und $v_0+\mathrm{d}v$.

Vergleicht man die klassische Newtonsche Theorie mit der Tabellierung von Zuständen, so wird ein Umstand bemerkenswert: Bei einer Folge von Zuständen ist es völlig sinnlos, davon zu sprechen, daß im Zeitpunkt $t=t_0$ der Ort $x=x_0$ und gleichzeitig die Geschwindigkeit $v=v_0$ sei: Es gibt Zeitpunkte (Menge der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen), in denen x unbestimmt ist, während die Distribution über $\bar{t}$ den „Wert" ∞ (im Sinne von (4)) einnimmt und andere Zeiten $\bar{t}$ (Menge der Mächtigkeit des Kontinuums), bei denen x bestimmt ist und die Distribution v den Wert Null einnimmt. Klassische Kraftgesetze fordern hingegen immer zu einem Anfangszeitpunkt t_0 simultan die Anfangswerte $x=x_0$ und $v=v_0$. Die simultanen Werte sind hier auf Grund des Mechanismus der Zeitsprünge unmöglich. Diese prinzipielle Unbestimmtheit von Anfangswerten x_0 und v_0 ergibt zunehmende Unbestimmtheiten der klassisch ermittelten Bahn für wachsendes t. Offenbar sollte man nach einer neuen handhabbaren Theorie suchen, die auch dann anzuwenden ist, wenn die zulässigen Δt-Schritte als nicht beliebig klein anzusehen sind gegenüber dem gesamten zu beschreibenden Bewegungsvorgang und insbesondere bei Wechselwirkung mit Feldern und anderen Teilchen.

Von dieser Theorie können wir einige wünschenswerte oder unvermeidliche Grundeigenschaften sofort angeben:

α) Das beschriebene Teilchen soll auf einer mittleren Bahn der Newtonschen Bahn folgen (was mittlere Bahn ist, muß noch genauer gesagt werden).

β) Statt präziser Koordinatenangaben wird man sich mit gemittelten (integralen) Aussagen begnügen müssen.

γ) Um Anschluß an unsere die „Phase" der Zeitsprünge schwerlich erfassenden „Meßapparaturen" (für $\bar{t}$, $\bar{x}(\bar{t})$, $\bar{v}(\bar{t})$) zu gewinnen, suchen wir nach einem verschmierten Abbild der „Bewegung" auf der kontinuierlichen Zeitskala, also auf $\bar{t}$.

Ein weiterer Punkt δ) wird im Abschnitt 4 hinzukommen.

4. Der Bewegungsmechanismus und die mittlere Bahn

Sind n „Bahn"punkte (mit $n \to \infty$) in äquidistanten Zeitpunkten gegeben, so liefert beispielsweise die Newtonsche Interpolationsformel eine alle Punkte verbindende Interpolationskurve in Form eines Polynoms in $\bar{t}$ (höchstens) n-ten Grades, die uns interessierende mittlere „Bahn"kurve.

Ein implizierter Umstand soll besonders hervorgehoben werden: Kennt man nur wenige, benachbarte Bahnpunkte $x_k \ldots x_l$, so wird die Kenntnis der „Bahn" um so ungenauer, je stärker x von $x_k \ldots x_l$ abweicht. Das Interpolationspolynom ist ja (höchstens) vom Grade $(l-k)$. Diesem Mangel kann auch nicht durch Angabe der zugehörigen Geschwindigkeitsdistribution abgeholfen werden. Beide Größen hängen ja nicht funktional, sondern eben nur über eine Distribution miteinander zusammen.

Der Umstand, daß für große Abstände von der Stelle, an der wir Kenntnis haben von den benachbarten Bahnpunkten $x_k \ldots x_l$, die Bahnangabe mit Hilfe einer Interpolationsformel unpräzise wird, liefert nun eine weitere Aussage (vgl. Abschnitt 3) über die Beschafffenheit einer handhabbaren Theorie:

δ) Eine Bahnangabe weit ab von den Punkten, an denen die Bahn wirklich vermessen wurde (prinzipielle Schwierigkeiten des Meßprozesses noch nicht berücksichtigt), kann nur eine Aussage über einen Bahn-Erwartungswert sein. Das gleiche gilt für die Geschwindigkeitsdistribution.

Um den Erwartungswert für die Geschwindigkeit zu finden, gehen wir von (2) aus. Wir wollen jetzt aber in jedem „Sprungpunkt" $\bar{t} = t - \frac{1}{2}$ $(t \in \mathbb{Z})$ beliebige Sprünge zulassen. Für $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t}$ haben wir dann

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} v_t\, \delta(\bar{t} - t + \tfrac{1}{2}). \tag{8}$$

Im Sinne einer statistischen Aussage über einen Erwartungswert $E(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t}) = \overline{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t})}$ interpretieren wir (8) wie folgt um: $v_t\, \delta(\bar{t} - t + \frac{1}{2})$ ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude, mit der die Zufallsgröße v_t auftritt.

Gleichung (8) mildern wir bezüglich der Strenge der Aussage: Statt der Distributionen $\delta(\bar{t} - t + \frac{1}{2})$ schreiben wir

$$\delta(\bar{t} - t + \tfrac{1}{2}) \to w_v(\bar{t}, t), \tag{9}$$

wobei wir uns vorstellen wollen, daß w_v in einem uns zunächst nicht zugänglichen Grenzprozeß in $\delta(\bar{t} - t + \frac{1}{2})$ übergeht. Diese Zuordnung ist nicht eindeutig; die präzise Gestalt von $w_v(\bar{t}, t)$ wird auf noch zu beschreibende Weise gefunden. $w_v(\bar{t}, t)$ soll eine stetig differenzierbare Funktion sein, die einen Erwartungswert $E(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{t})$ bestimmt (siehe z. B. [4]).

$$E\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}}\right) = \left(\overline{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}}}\right) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} v_t\, w_v(\bar{t}, t) = \bar{v}(\bar{t}). \tag{10}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $w_v(\bar{t}, t)$ wird also die Geschwindigkeit v_t belegt. Jetzt gehen wir von der diskreten Geschwindigkeitsfolge v_t zu einer kontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilung $v(t)$ über. Diese belegen wir wieder mit einer (differentiellen) Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{d}w_v(\bar{t}) = w_v'(\bar{t})\, \mathrm{d}v. \tag{11}$$

Statt der Summe (10) erhalten wir dann (in dem wir jetzt über alle $\mathrm{d}v$-Abschnitte summieren)

$$E\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}}\right) = \left(\overline{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}}}\right) = \int_{v=-\infty}^{+\infty} v\, w_v'(\bar{t})\, \mathrm{d}v, \tag{12}$$

oder als Erwartungswert für den Impuls geschrieben (w_p' ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls)

$$m\left(\overline{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{t}}}\right) = \bar{p}(\bar{t}) = \int_{p=-\infty}^{+\infty} p\, w_p'(\bar{t})\, \mathrm{d}p; \quad w_p = w_v/m. \tag{13}$$

m ist die Masse des Teilchens.

Natürlich wissen wir nichts über die Größe $w_p'(\bar{t})$, die durch Verschmierung von δ-Funktionen entstand. Wir müssen deshalb versuchen, sie aus plausiblen Annahmen zu konstruieren. Zunächst können wir wenigstens feststellen, daß $\bar{p}(\bar{t})$ offenbar für alle Zeiten $\bar{t}$ existiert. Ebenso wird es mit der äquivalenten Größe für den Ortserwartungswert

$\bar{x}(\bar{t})$ sein, die wir formal ganz analog schreiben:

$$\bar{x}(\bar{t}) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x\, w'_x(\bar{t})\, \mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

w'_x ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

Es erscheint nun als Annahme vernünftig, von den mit Hilfe von w'_p und w'_x definierten Erwartungswerten $\bar{p}(\bar{t})$ und $\bar{x}(\bar{t})$ zu fordern, daß sie den Newtonschen Bewegungsgleichungen gehorchen. Wir folgen dabei den Ehrenfestschen Ergebnissen in bezug auf die Bewegung von Wellenpaketen in der Quantenmechanik [5]. Bevor wir dies im einzelnen ausführen, wollen wir noch einige sofort einleuchtende Beziehungen anschreiben. Man sieht sofort, daß offenbar gelten muß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w'_p\, \mathrm{d}p = 1 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w'_x\, \mathrm{d}x = 1\,. \qquad (15), (16)$$

Die beiden Gleichungen sagen aus, daß für das Teilchen irgend ein Impuls und irgend ein Ort (gleichzeitig) mit Sicherheit (der Wahrscheinlichkeit 1) existiert. Hierzu schließt man weiter, daß w'_p und w'_x nicht negativ sein können. Darüber hinaus sind beide Größen reell. Man schreibt dann für w'_p und w'_x

$$w'_p = \psi_p^* \psi_p = |\psi_p|^2 \quad \text{und} \quad w'_x = \psi_x^* \psi_x = |\psi_x|^2, \qquad (17), (18)$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_p|^2\, \mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_x|^2\, \mathrm{d}x = 1\,. \tag{19}$$

Diese Beziehung ist in der Theorie der Fourier-Transformation als Parsevalsche Gleichung bekannt: (19) gilt für alle über eine Fourier-Transformation miteinander verbundenen Größen ψ_p und ψ_x:

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i p x/h}\, \psi_x\, \mathrm{d}x \tag{20}$$

und

$$\psi_x = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2\pi i p x/h}\, \psi_p\, \mathrm{d}p\,. \tag{21}$$

Die Größe h ist hier zunächst rein formal aber zwingend aus Dimensions- und Normierungsgründen eingeführt. Wir versuchen deshalb, (19) mit dem *Ansatz* (20), (21) zu erfüllen.

Aus (20), (21) liest man sofort die Identitäten

$$x = i\frac{h}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \quad \text{und} \quad p = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad (22), (23)$$

ab, indem man für (20) die Identität

$$\sqrt{h}\, \psi_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i p x/h}\, \psi_x\, \mathrm{d}x$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i\frac{h}{2\pi}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \right) e^{-2\pi i p x/h}\, \psi_x\, \mathrm{d}x \tag{24}$$

beachtet (entsprechend bei (21)). x bleibt in der ψ_x-Darstellung Multiplikationsoperator, p entsprechend in der ψ_p-Darstellung.

Mit der Mittelwertbildung über dem Zeitkontinuum $\bar{t}$ und der Zulassung beliebiger Impuls- und Koordinatenwerte (Gl. (11)) hat sich offenbar der Charakter der Größen p und q geändert: Sie werden jetzt durch Operatoren dargestellt.

Um die die Funktionen $\psi_p(\bar{t})$ und $\psi_x(\bar{t})$ einschränkenden Bedingungen zu finden, beachten wir, daß die einzige Legitimation dieser Größen in der Bestimmung der Mittelwerte (Erwartungswerte) liegt, die den Newtonschen Bahngesetzen entsprechen. Die $\psi_p(\bar{t})$, $\psi_x(\bar{t})$ müssen also so bestimmt werden, daß für den Impulserwartungswert p mit (14) die Bedingung

$$\bar{p} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}}\bar{x} \tag{25}$$

erfüllt ist.

Zur Verifizierung dieser Gleichung schlagen wir den umgekehrten Weg ein, den Ehrenfest gegangen ist: Er setzte dort die Schrödinger-Gleichung voraus und fand (25) für die Erwartungswerte. Einzelheiten entnimmt man dem Buch von Süssmann [6], dessen Bezeichnungsweise hier verwendet wird. Wir betrachten dazu die der Parsevalschen Gleichung zugrunde liegende allgemeinere Aussage, die zwischen Funktionen ψ_p, ψ_x bzw. φ_p, φ_x gilt, für die ein Zusammenhang vermittels einer Fouriertransformation besteht, nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x^* \varphi_x\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p^* \varphi_p\, \mathrm{d}p\,. \tag{26}$$

Setzt man speziell

$$\varphi_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_x = \psi'_x, \tag{27}$$

so folgt aus

$$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i p x/h}\, \varphi_x\, \mathrm{d}x \tag{28}$$

mit (23) und $h = 2\pi\hbar$ gesetzt

$$\varphi_p = i\,\hbar^{-1}\,p\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i p x/h}\,\varphi_x\,\mathrm{d}x = i\hbar^{-1}p\,\psi_p\,. \tag{29}$$

Statt (26) erhält man dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x^*\,\psi_x'\,\mathrm{d}x = i\hbar^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_p^*\,p\,\psi_p\,\mathrm{d}p = i\hbar^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}p\,|\psi_p|^2\,\mathrm{d}p\,. \tag{30}$$

Nach (13) und (17) hat man also für den Impulserwartungswert

$$\bar{p} = m\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x^*\,\psi_x'\,\mathrm{d}x\,. \tag{31}$$

Führen wir den reellen Strom

$$s = \frac{\hbar}{i\,2m}(\psi_x^*\,\psi_x' - \psi_x^{*\prime}\,\psi_x) \tag{32}$$

ein, so kann man für $\bar{v} = \mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{t}$ schreiben

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{\hbar}{i\,2m}\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_x^*\,\psi_x' - \psi_x^{*\prime}\,\psi_x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}s\,\mathrm{d}x\,. \tag{33}$$

Setzt man nun voraus, daß s bei $x = \pm\infty$ verschwindet, so hat man statt (33) nach partieller Integration

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}} = -\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}s = -\int_{-\infty}^{+\infty}x\,s'\,\mathrm{d}x\,. \tag{34}$$

Wenn es uns jetzt gelingt, für s' zu schreiben

$$s' = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}}w_x' = -\dot{w}_x'\,, \tag{35}$$

so wäre in der Tat für die Erwartungswerte $\bar{x}$, $\bar{v}$ und für $\bar{t}$ die makroskopische Definitionsgleichung (25) erfüllt.

Wir sehen uns (35) etwas genauer an und bilden mit (32)

$$s' = \frac{\hbar}{i\,2m}(\psi_x^{*\prime}\,\psi_x' + \psi_x^*\,\psi_x'' - \psi_x^{*\prime\prime}\,\psi_x - \psi_x^{*\prime}\,\psi_x') \tag{36}$$

und mit (18)

$$\dot{w}_x' = \dot{\psi}_x^*\,\psi_x + \psi_x^*\,\dot{\psi}_x\,. \tag{37}$$

Die Summe soll verschwinden; also hat man

$$\psi_x\left(\dot{\psi}_x^* - \frac{\hbar}{i\,2m}\psi_x^{*\prime\prime}\right) + \psi_x^*\left(\dot{\psi}_x + \frac{\hbar}{i\,2m}\psi_x''\right) = 0 \tag{38}$$

oder, mit $\psi_x \neq 0$,

$$\dot{\psi}_x + \frac{\hbar}{i\,2m}\psi_x'' = 0\,. \tag{39}$$

Diese als Schrödinger-Gleichung bekannte Gleichung muß notwendig erfüllt sein, damit die Funktionen ψ_x (bzw. ψ_p) die Erwartungswerte $\bar{x}$ und $\bar{p}$ darstellen. Man sieht übrigens sofort, daß auch die Gleichung

$$i\,\hbar\,\dot{\psi}_x + \frac{\hbar^2}{2m}\psi_x'' - U(x,t)\,\psi_x = 0 \tag{40}$$

bei reellem U hinreichend für die Erfüllung von (35) ist. Diese Gleichung folgt übrigens auch notwendig, wenn man die Newtonsche Kraftgleichung für die Erwartungswerte von Beschleunigung und auf das Teilchen wirkender äußerer (konservativer) Kraft erfüllen will ((31) wird nochmals nach der Zeit differenziert).

$$m\,\ddot{\bar{x}} = \bar{F}\,. \tag{41}$$

Dabei wird

$$\bar{F}(\bar{t}) = -\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,\bar{t})\,|\psi_x(\bar{t})|^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{42}$$

Die Konsequenzen der Schrödinger-Gleichung für den kräftefreien Fall und den Fall der Bewegung im Potential $U(x,\bar{t})$ sind bekannt und brauchen nicht erörtert zu werden.

5. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß eine Quantisierung der Zeit in einer Theorie, in der Teilchen grundsätzlich nur als diskrete Zustände des gesamten Kosmos beschrieben werden, für näherungsweise angeführte Teilchenbahnen die Konsequenz hat, daß der „Impuls" p und der Ort x nicht mehr über die klassischen Bewegungsgleichungen zusammenhängen können. Ihr funktionaler Zusammenhang wird streng durch Distributionen ersetzt. Damit ist auch der klassische Zusammenhang Differentialgleichung-Anfangsbedingung–Bahn aufgehoben. Die Einführung des Begriffes „Bahn" gelingt über einen Mittelungsprozeß. Im Sinne der Newtonschen Approximation einer Kurve, die optimal gegebene Punkte verbindet, ist diese Bahnkurve erst nach Kenntnis aller Bahnpunkte $x(t)$ für $-\infty \leqq t \leqq +\infty$ $(t \in \mathbb{Z})$

bestimmt. Beim Mittelungsprozeß spielen die Begriffe Orts- und Impulserwartungswert eine entscheidende Rolle. Da diese Erwartungswerte von allen Punkten x abhängen, gelten für sie Summendarstellungen (über alle t). Die Summen können durch Integrale approximiert werden, in denen im Limes über alle mit einer Orts- bzw. Impulswahrscheinlichkeit zu belegenden dx bzw. dp-Elemente integriert wird. Die p und x werden dabei zu Operatoren, für die die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen gelten. Sollen die errechneten Orts- und Impulserwartungswerte der klassischen Newtonschen Mechanik gehorchen, so ergibt sich die Schrödinger-Gleichung als einschränkende Bedingung für die Orts- und die Impulswahrscheinlichkeiten.

Die notwendige Existenz einer Quantenmechanik könnte so als Hinweis dafür gesehen werden, daß der zeitliche Ablauf der Vorgänge im Kosmos grundsätzlich als Folge von Zuständen beschrieben werden muß, mit einem diskontinuierlichen Parameter t als Ordnungszahl.

Ich danke Herrn Kollegen G. Süssmann und Herrn Dr. G. Trommer für interessante Diskussionen.

[1] M. Börner, Z. Naturforsch. **22a,** 1825 (1967).
[2] M. Börner, Z. Naturforsch. **22a,** 1835 (1967).
[3] M. Börner, Z. Naturforsch. **24a,** 185 (1969).
[4] B. W. Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Akademie-Verlag, Berlin 1962, S. 158.
[5] P. Ehrenfest, Z. Physik **45,** 455 (1927).
[6] G. Süssmann, Einführung in die Quantenmechanik, BI-Hochschultaschenbücher, Band 9/9a, Bibliographisches Institut, Mannheim 1963.